$$\bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x} \iff \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \longrightarrow 0$$

$\cap \quad \cap$

$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N},\ \forall \nu\in\mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon}_{\iff \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \varepsilon)}$$

$$\iff \bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to 0$$

$$\iff \forall i=1,\dots,n \quad x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)}$$

Πρόταση (να δειχθεί) όπου $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)})$

$\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$

Απόδειξη της Πρότασης

Χρησιμοποιούμε:

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{x}\| \leq \sqrt{n}\, \|\bar{x}\|_\infty$$

$= (x_1, \dots, x_n)$

($\Longrightarrow$) Έχουμε $\forall i=1,\dots,n : \forall \nu\in\mathbb{N}$

$0 \leq |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \longrightarrow 0$. Θ. Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών στο $\mathbb{R}$: $|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \forall i=1,\dots,n : \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0$

όπου $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \geq \max\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0 : \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}_{\iff \sqrt{n}\,\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \varepsilon} \underset{(2)}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu\geq\nu_0$:

$\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$.

αλλά: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \leq \sqrt{n}\, \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \varepsilon$

($\Longleftarrow$) $\forall i=1,\dots,n : \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_i \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_i$

Ορισμός: Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ στο $\mathbb{R}^n$, λέγεται ακολουθία Cauchy, αν:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu,\mu\in\mathbb{N},\ \nu,\mu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ (Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει)(το αντίστροφο ισχύει πάντα), με την προηγούμενη πρόταση, έχουμε την πληρότητα του $\mathbb{R}^n$ (ΠΡΟΣΟΧΗ: αυτό ισχύει επειδή έχουμε πεπερασμένες διαστάσεις).

Πρόταση: Μία ακολουθία $(x_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω $\overline{x}_\nu \to \overline{x}_0$: $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0: \|\overline{x}_\nu - \overline{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu,\mu \geq \nu_0: \|\overline{x}_\nu - \overline{x}_\mu\| \leq \|\overline{x}_\nu - \overline{x}_0\| + \|\overline{x}_0 - \overline{x}_\mu\| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) (εδώ χρησιμοποιούμε την πληρότητα του $\mathbb{R}$).

Έστω $(\overline{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ είναι ακολουθία Cauchy:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu,\mu \geq \nu_0: \|\overline{x}_\nu - \overline{x}_\mu\| < \varepsilon$.

($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu,\mu \geq \nu_0: |x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}| \leq \|\overline{x}_\nu - \overline{x}_\mu\| < \varepsilon,\ \forall i=1,\dots,n$.

$(x_\nu^{(i)})$ ακολ. Cauchy στο $\mathbb{R}$ $\exists x_0^{(i)} \in \mathbb{R}: x_\nu^{(i)} \longrightarrow x_0^{(i)}\ \forall i=1,\dots,n$
$\forall i=1,\dots,n$
(σύμφωνα με την πληρότητα του $\mathbb{R}$).

Συνεπώς από την προηγούμενη Πρόταση ισχύει.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: Μία φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: (και εδώ χρησιμοποιούμε το Θ. Bolzano-Weierstrass στο $\mathbb{R}$).

Αφού η $(\overline{x}_\nu) = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένη (δηλ. $\|\overline{x}_\nu\| < M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, σταθερό $M>0$) $\Rightarrow$ Κάθε ακολουθία στο $\mathbb{R}$, $(x_\nu^{(i)}) \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένη (αφού $|x_\nu^{(i)}| \leq \|\overline{x}_\nu\|$) $\forall i=1,\dots,n$

$\underset{\text{Θ. B-W στο } \mathbb{R}}{\Longrightarrow}$ $\forall i=1,\dots,n\ \exists \left(x_{k_\nu^{(i)}}^{(i)}\right) \subset \left(x_\nu^{(i)}\right)$, που αντιστοιχεί στην υπακολουθία δεικτών $\left(k_\nu^{(i)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset (\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, έτσι ώστε $x_{k_\nu^{(i)}} \longrightarrow x_0^{(i)}$

Προσοχή: Οι υπακολουθίες δεικτών $\left(k_\nu^{(i)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μπορεί να είναι διαφορετικές για διαφορετικά $i=1,\dots,n$

Εμείς όμως θέλουμε να βρούμε μια κοινή υπακολουθία δεικτών $(k_\nu) \subset (\nu)$, έτσι ώστε όλες οι $(x_{k_\nu}^{(i)}) \subset (x_\nu^{(i)})$ να συγκλίνουν $\forall\, i = 1, \ldots, n$

Αυτό γίνεται ως εξής:

Έστω $(\bar{x}_{\ell_\nu})$ μια υπακολουθία της $(\bar{x}_\nu)$, έτσι ώστε η $(x_{\ell_\nu}^{(1)}) \in (x_\nu^{(1)})$ να συγκλίνει.

Οι $(x_{\ell_\nu}^{(i)})$, $i = 2, \ldots, n$ παραμένουν φραγμένες

Επιλέγουμε τώρα μια υπακολουθία $(\bar{x}_{\ell_{m_\nu}}) \subset (\bar{x}_{\ell_\nu})$ έτσι ώστε η $(x_{\ell_{m_\nu}}^{(2)})$ να συγκλίνει

Τότε και η $(x_{\ell_{m_\nu}}^{(1)}) \subset (x_{\ell_\nu}^{(1)})$ συγκλίνει και οι

$(x_{\ell_{m_\nu}}^{(i)})$, $i = 3, \ldots, n$ παραμένουν φραγμένες.

Συνεχίζοντας έτσι επαγωγικά, μετά τη διαδοχική επιλογή n υπακολουθιών θα έχουμε βρει μια υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \in (\bar{x}_\nu)$ με $x_{k_\nu}^{(i)} \to x_0^{(i)}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$

Άσκηση

1) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$\bar{x} \in U' \iff \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$$

(Υπενθύμιση: $\bar{x} \in U' \iff \bar{x}$ σημείο συσσώρευσης του U
$\iff \forall \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$)

2) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$\bar{x} \in \bar{U} \iff \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$$

(Υπενθύμιση: $\bar{U} = U \cup U'$)

3) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ κλειστό} \iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \text{ με } \bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}, \ \bar{x} \in U.$$

(Δηλαδή ένα σύνολο είναι κλειστό, ανν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία αυτού έχει όριο διάνυσμα του συνόλου).

Τέλος,

$U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall\ (\bar{X}_\nu) \subset U$

$\Leftrightarrow$ κλειστό και φραγμένο

$\exists\ (\bar{X}_{k_\nu}) \subset (\bar{X}_\nu)$ με $\bar{X}_{k_\nu} \to \bar{X}$